

A. İKİNCİ DERECEDEEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ iken $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

Kökleri x_1 ve x_2 olan denklemin köklerinin oluşturduğu kümeye çözüm kümesi denir.

$ax^2 + bx + c = 0$ denklemi için

$\Delta = b^2 - 4ac$ (diskriminant) durumunu incelersek,

1. $\Delta > 0$ ise farklı iki reel kök vardır.

$$\left(x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

2. $\Delta = 0$ ise, kökler eşittir.

[Kökler iki katlı, çözüm kümesi bir elemanlı, çakışık iki köklü, tam kare, olarak da kullanılır.]

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

3. $\Delta < 0$ ise, reel kök yoktur. (Kökler sanaldır.)

B. KÖK – KATSAYI BAĞINTILARI

$\Delta > 0$ iken $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ise:}$$

$$1. \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$2. \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$3. \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{b}{c}$$

$$4. \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$5. \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$$

$$6. \quad x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$7. \quad |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \text{ bağıntıları bulunur.}$$

8. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin simetrik iki kökünün olması için $b = 0$ ve $a \cdot c \leq 0$ olmalıdır.
($x_1 + x_2 = 0$ olur.)

ÖRNEK 1.

$$x - \frac{3a+2}{x} = 0 \text{ denkleminin köklerinden biri 4 ise,}$$

diğeri kaçtır?

ÖRNEK 2.

$$x^2 = 5x \text{ denkleminin çözüm kümesi nedir?}$$

ÖRNEK 3.

$a \neq 0, a \in \mathbb{R}$,

$a^2x^2 - 2ax - 15 = 0$ denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3}{a}$ B) $-\frac{5}{a}$ C) $-\frac{3}{a}$ D) $-5a$ E) $3a$

ÖRNEK 4.

$$(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit ise, m kaçtır?

ÖRNEK 5.

$$x^2 - (2m+1)x + m^2 - 2 = 0$$

denkleminin birbirinden farklı gerçel iki kökü var ise, **m için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $m < -\frac{3}{2}$ B) $m < -\frac{9}{4}$ C) $m > -\frac{3}{2}$

D) $m > -\frac{9}{4}$ E) $-\frac{9}{4} < m < -\frac{3}{2}$

ÖRNEK 6.

$x^2 - 12x + 8 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

ÖRNEK 7.

$x^2 - 2mx + 4m + 3x = 0$ denkleminin simetrik iki kökü varsa, **kökler çarpımı kaçtır?**

ÖRNEK 8.

$x^2 + (m+1)x + n = 0$ denkleminin bir kökü -1 ise, **$m - n$ kaçtır?**

C. KÖKLERİ BİLİNER İKİNCİ DERECE DENKLEMİ YAZMA

Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci derece denklem;

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0 \text{ veya } x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

dır. $x_1 + x_2 = T$ ve $x_1 \cdot x_2 = Ç$ olarak gösterirsek denklem; $x^2 - T \cdot x + Ç = 0$ biçiminde yazılabilir.

ÖRNEK 9.

Kökleri 2 ve (-5) olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

NOT:	Rasyonel katsayılı 2.dereceden bir denklemin köklerinden biri $p - \sqrt{q}$ ise diğeri $p + \sqrt{q}$ denir.
------	---

ÖRNEK 10.

Köklerinden biri $x_1 = 5 - 2\sqrt{5}$ olan ikinci derece denklemi yazınız.

ÖRNEK 11.

$x^2 - (m+1)x + 1 - 9m = 0$ denkleminin kökleri toplamı 2 ise, **kökleri çarpımı kaçtır?**

ÖRNEK 12.

$2x^2 - 9x + 6 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise, **$(x_1 + 4)(x_2 + 4)$ ifadesinin eşitini bulalım.**

ÖRNEK 13.

$x^2 - 7x + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ nin pozitif değeri kaçtır?

ÖRNEK 14.

$x^2 - 7x + m = 0$ denkleminin x_1 ve x_2 kökleri arasında

$x_1 + 3x_2 = 3$ bağıntısı var ise **m kaçtır?**

ÖRNEK 15.

$(3m - 2)x^2 + 2(1 - 2m)x + 5m - 6 = 0$ denkleminin kökleri

x_1 ve x_2 dir.

$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{3}$ ise, **m kaçtır?**

ÖRNEK 16.

$2x^2 - (4m - 2)x + 4m - 2 = 0$

denkleminin kökleri çarpımı 7 ise, **kökleri toplamı kaçtır?**

ÖRNEK 17.

$x^2 + ax - 3 = 0$ denkleminde

$\frac{2}{x_1} + \frac{x_2}{2} = 2$ bağıntısı varsa, **a kaçtır?**

ÖRNEK 18.

$x^2 - 3x + m - 1 = 0$ denkleminin kökleri arasında

$2x_1 + x_2 = 4$ bağıntısının olması için

m değeri ne olur?

ÖRNEK 19.

m ve n sıfırdan farklı gerçel sayılardır.

$x^2 + mx + n = 0$ denkleminin kökleri m, n ise

kökler çarpımı kaçtır?

ÖRNEK 20.

$x^2 - 3ax + b + 3 = 0$ denkleminin bir kökü 2 ve

$x^2 - 2ax + b = 0$ denkleminin bir kökü 1'dir.

Bu denklemlerin diğer kökleri eşit olduğuna göre,

(a + b) toplamı kaçtır?

ÖRNEK 21.

$2x^2 + x - m = 0$ } denkleminin birer kökleri eşit ise,
 $x^2 + 4x + 3m = 0$ }

m değeri kaçtır?

NOT:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$$

Denklemlerinin;

I. Birer kökü ortak ise

x^2 'li ifadeler yok edilecek şekilde taraf tarafa toplanır. Buradan bulunan x değeri denklemlerin ortak köküdür.

II. İkişer kökleri eşitse,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 22.

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

denkleminin köklerinden biri aynı zamanda

$$x^2 - 7x + 2m - 3 = 0 \text{ denkleminin de kökü ise,}$$

m in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

ÖRNEK 23.

$\alpha \neq 0$ olmak üzere

$$x^2 + 5x - 3\alpha = 0 \text{ ve } x^2 - 3x + \alpha = 0$$

denkleminin birer kökleri ortak olduğuna göre, **bu ortak kök kaçtır?**

ÖRNEK 24.

$x^2 - 4x + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise, kökleri **$(2x_1)$ ve $(2x_2)$ olan 2. dereceden denklemi yazınız.**

ÖRNEK 25.

$x^2 + 7x + 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise, kökleri **$(x_1 + 2)$ ve $(x_2 + 2)$ olan 2. dereceden denklemi yazınız.**

ÖRNEK 26.

$x^2 - 5x + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise,

kökleri **$(2x_1 + 1)$ ve $(2x_2 + 1)$ olan 2. dereceden denklemi yazınız.**

NOT:

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri

x_1 ve x_2 olsun. Kökleri

$(mx_1 + n)$ ve $(mx_2 + n)$ olan 2. dereceden

denklemi bulmak için $ax^2 + bx + c = 0$

denkleminde x yerine $\frac{x-n}{m}$ yazılır.

ÖRNEK 27.

$x^2 - 4x - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise,

kökleri **$(3x_1 - 1)$ ve $(3x_2 - 1)$ olan 2. dereceden denklemi yazınız.**

İKİNCİ DERECEDEEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEME DÖNÜŞTÜRÜLEBİLEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Verilen denklem ikinci dereceden olmadığı halde, bir dönüşümle ikinci dereceden bir denkleme dönüştürülebiliyorsa, çözümü bu yolla bulunur.

1. Değişken Değiştirerek Çözülebilen Denklemler

İkinci dereceden daha yüksek dereceden olan bazı denklemler, yardımcı bilinmeyen kullanılarak ikinci dereceden denkleme dönüştürülüp çözülebilirler.

ÖRNEK 28.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

ÖRNEK 29.

$$\frac{1}{x^2} = 4x^4 - 3 \text{ denkleminin çözüm kümesini bulalım.}$$

ÖRNEK 30.

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$$

denklemini gerçekleyen x değerlerinin çarpımı kaçtır?

ÖRNEK 31.

$$\left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + \frac{3x+6}{3} - 18 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

ÖRNEK 32.

$$(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$$

denkleminin köklerini bulunuz.

ÖRNEK 33.

$$(x^2 + 3)^2 + 84 = 19(x^2 + 3)$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

ÖRNEK 34.

$$(x^2 + x - 1)^2 - x^2 - x - 1 = 0$$

denkleminin reel sayılar olan köklerinin toplamı kaçtır?

2. Köklü Denklemler

Bir denklemde kök içerisinde bilinmeyen varsa bu denkleme köklü denklem denir. $\sqrt{f(x)} = g(x)$ biçimine getirilerek eşitliğin her iki yanının kök kuvveti alınır ve kökten kurtarılır. Elde edilen yeni denklem çözülerek kökler bulunur.

Kök kuvveti çift olan köklü denklemlerde, bulunan x değerleri denklemin kökü olmayabilir. Sağlamayan köke “yalancı kök” denir ve çözüm kümesine dahil edilmez.

ÖRNEK 35.

$\sqrt{x+3} - x = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

ÖRNEK 36.

$\sqrt{x+3} = 2x - 9$ denkleminin kökü kaçtır?

ÖRNEK 37.

$$\sqrt{3x+10} = 2x - 5$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

3. Mutlak Değerli Denklemler

Daha önce işlediğimiz mutlak değer tanımıyla faydalanılır.

ÖRNEK 38.

$$x^2 + |x| - 12 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

ÖRNEK 39.

$$x^2 + |x-3| - 3 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

ÖRNEK 40.

$$|x^2 - 1| = |x - 1| \text{ denkleminin köklerinin toplamı kaçtır?}$$

ÜÇÜNCÜ DERECEDEN DENKLEMLER

Tanım

$a \neq 0$ olmak üzere $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ şeklindeki denklemlere üçüncü dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

Çözüm Kümesinin Bulunması

Denklem ya çarpanlara ayrılır ya da "Sabit terimi tam bölen tam sayılardan birisi kök olabilir." Bilgisinden faydalanılarak deneme yanılma yoluyla köklerden biri bulunup polinom bölmesi yapılarak diğer kökler bulunur.

ÖRNEK 41.

$x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = 0$ denkleminin köklerini bulalım.

ÖRNEK 42.

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ denkleminin köklerini bulalım.

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ DENKLEMİNİN KÖKLERİ İLE KATSAYILARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Kökleri x_1, x_2 ve x_3 olsun. üçüncü dereceden denklem

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0 \text{ veya}$$

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0 \text{ dir.}$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \text{ olduğundan}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 43.

$x^3 - 6x^2 + 5x - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 tür.

Buna göre aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulalım.

A) $x_1 + x_2 + x_3 = ?$

B) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = ?$

C) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = ?$

NOT: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 olsun.

1. Kökler aritmetik dizi oluşturuyorsa,

$$\frac{x_1 + x_3}{2} = x_2$$

2. Kökler geometrik dizi oluşturuyorsa,

$$\sqrt{x_1 \cdot x_3} = x_2$$

3. Kökler hem aritmetik hem de geometrik dizi oluşturuyor ise,

$$x_1 = x_2 = x_3 \text{ tür.}$$

ÖRNEK 44.

$$x^3 - 14x^2 + mx - 64 = 0$$

denkleminin kökleri bir geometrik dizi oluşturmaktadır.

Buna göre m kaçtır?

ÖRNEK 45.

$x^3 - 3x^2 + mx = 0$ denkleminin kökleri bir aritmetik dizi oluşturuyorsa, **m kaçtır?**

ÖRNEK SORULAR

1. $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$,

$a^2x^2 - 2ax - 15 = 0$ denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{3}{a}$ B) $-\frac{5}{a}$ C) $-\frac{3}{a}$ D) $-5a$ E) $3a$

2. $(p+1)x^2 + 2(p-1)x + 3p + 22 = 0$

denkleminin köklerinden birisi 2 ise, **diğer kök nedir?**

3. $\left(\frac{3x+2}{x}\right)^2 - \left(\frac{3x+2}{x}\right) - 6 = 0$

denkleminin kökleri toplamı kaçtır?

4. $\frac{1}{x^2} - 2x^4 - 3 = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

5. $|x^2 - 9| - |x - 3| = 0$

denklemini sağlayan farklı x değerlerinin çarpımı kaçtır?

6. $(2m+1)x^2 - 3(m+1)x + 4m - 3 = 0$

denkleminin kökleri toplamı $-\frac{1}{2}$ ise,

kökler çarpımı kaçtır?

7. $(x-2) \cdot (x^2 - 3x - 3) = (x-2)$

denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

8. $\sqrt[3]{x} + \frac{7}{\sqrt[3]{x}} = -8$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

9. $x + \sqrt{2x} - 12 = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

10. m ve n rasyonel sayılar olmak üzere,

$5x^2 - mx + mn = 0$ denkleminin bir kökü $3 - \sqrt{m}$ ise,

$\frac{m}{n}$ kaçtır?

11. $\frac{x^2 \cdot (x-5)}{x+2} - \frac{4(x-5)}{x+2} = 0$

denkleminin kökleri çarpımı kaçtır?

12. $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ denkleminin gerçel kökleri x_1, x_2 ve $|x_1^2 - x_2^2| = 4$ ise, m kaçtır?

13. $x^2 - (m-1)x + n - 1 = 0$ denkleminin kökleri

$x^2 - (m+1)x + n + 2 = 0$ denkleminin köklerinin ikişer katı ise, (m, n) nedir?

14. $\frac{x-1}{x-2} - \frac{1-x}{x} = x-1$

denkleminin kökleri toplamı kaçtır?

15. $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 10$

denkleminin kökleri çarpımı kaçtır?

16. $x\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x^2} - 3 = 0$

denkleminin gerçel köklerinin karelerinin toplamı kaçtır?

17. $2x^2 + ax - 6 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 dir.

a'nın hangi değeri için $x_1(x_2 + 2) = 5$

eşitliği sağlanır?

A) -2 B) $-\frac{7}{2}$ C) -4 D) $-\frac{13}{2}$ E) -9

18. $x^2 - (m-2)x + n - 3 = 0$

denkleminin çözüm kümesi $\{-3, 2\}$ ise,

$x^2 - (n+1)x + m - 4 = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

19. $(x-3) \cdot (x^2 - (m+1)x + m) = 0$

denkleminin kökleri çarpımı 12 ise kökler toplamı kaçtır?

20. $2x^2 + (m-3)x - 3 = 0$ denkleminin kökleri

x_1 ve x_2 dir. $x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 = 1$ ise, m kaçtır?

21. $x^2 + (2m+1)x - m = 0$ denkleminin kökleri

x_1 ve x_2 dir. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$ ise, m kaçtır?

22. $\sqrt{x+8} - x - 2 = 0$

denkleminin pozitif olan kökü kaçtır?

23. $x^2 - 4x + 3 = 0$ denkleminin kökleri a ve b'dir.

$\left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b - \frac{1}{a}\right)$ çarpımı kaçtır?

24. $2x^2 - 6x + 3 = 0$

denkleminin köklerinin ikiye eksiklerinin çarpımı kaçtır?

25. $2 + 3x^2 = ax(1-x)$

denkleminin çift katlı kökü vardır.

Buna göre a'nın alacağı değerler toplamı kaçtır?

BİRİNCİ DERECEDEKİ BİR DEĞİŞKENLİ EŞİTSİZLİKLER

$a \neq 0$ $a, b \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun işaretini incelemek için,

1. $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ (kök bulunur)

x	$-\infty$	$x = -b/a$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	a'nın işareti ile TERS	a'nın işareti ile AYNI	
	T	A	

Tablo yapılır ve yukarıdaki gibi işaret incelenir.

3. $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$ eşitsizliklerinden hangisi soruluyorsa tablo sonucu kullanılarak yanıtlanır.

ÖRNEK 1.

$7x - 5 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

İKİNCİ DERECEDEKİ BİR DEĞİŞKENLİ EŞİTSİZLİKLER

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ eşitsizliklerini incelemek için

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun işaretini incelenir.

1. $\Delta > 0$ ise, 2 reel kök vardır. Tablo:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	a'nın işareti ile AYNI	a'nın işareti ile TERS	a'nın işareti ile AYNI	
	A	T	A	

2. $\Delta = 0$ ise, kökler eşit. Tablo:

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	a'nın işareti ile AYNI	a'nın işareti ile AYNI	
	A	A	

3. $\Delta < 0$ ise, reel kök yoktur. Tablo:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	a'nın işareti ile AYNI	
	A	

UYARI:

- $\forall x \in \mathbb{R}$ için $ax^2 + bx + c > 0$ istendiğinde, $\Delta < 0$ ve $a > 0$ olmalıdır.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ için $ax^2 + bx + c < 0$ istendiğinde, $\Delta < 0$ ve $a < 0$ olmalıdır.

NOT: $\frac{P(x).Q(x).T(x)}{R(x)}$ şeklinde bir ifadenin işareti incelenirken, her çarpan veya bölünen kökleri bulunur. Kökler $-\infty$ dan $+\infty$ a doğru küçükten büyüğe sıralanır. Sonra $P(x)$, $Q(x)$, $T(x)$, $R(x)$ in büyük dereceli terimleri alınır ve çarpılır. Sonuç (+) ise, tablo en sondan (+) ile başlar [(-) ise tablo sondan (-) ile başlar.] ve kökten sonra işaret değişir. [Çift katlı köklerde işaret değişmez.] (Payda kökleri çözüme dahil edilmez)

ÖRNEK 2.

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 5$$

fonksiyonunun işaretini inceleyelim.

ÖRNEK 3.

$$\frac{x^2 - 3x - 10}{(x-1)^2} < 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

ÖRNEK 4.

$$\frac{(x+1)^{99}(5-x)^{66}}{(x^2-2x-3)(x^2+1)} > 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

ÖRNEK 5.

$$\frac{(x-3)(x+1)}{-x^2+7x-12} \geq 0$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

ÖRNEK 6.

$$\frac{(x^2+4x+6)(x^2-2x-3)}{x^2-x-2} \leq 0$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

ÖRNEK 7.

$$\frac{(1-x)^7(x-4)}{(x^2+3)(x+2)^2} \geq 0$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

ÖRNEK 8.

$$\frac{2^{x-1} \cdot (x^2 - 4x + 5)}{(x^2 - 4)} \leq 0$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK 9.

$$\frac{|x-6| \cdot (x^2 - 2x + 1)}{(x^2 - 9)} \leq 0$$

eşitsizliğin çözüm

kümesini bulunuz.

ÖRNEK 10.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+2}{x-2} > 0 \\ \frac{-5}{x-2} > 0 \end{array} \right\}$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

ÖRNEK 11.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^3 - 4x^2 < 0 \end{array} \right\}$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

ÖRNEK 12.

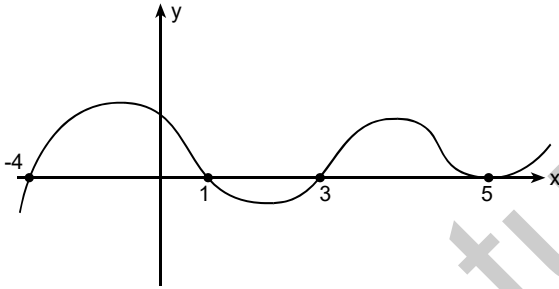
$$\frac{1}{2x-4} \leq \frac{1}{x+3}$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

ÖRNEK 13.

$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x-1}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

ÖRNEK 14.



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
 $(x - 1) \cdot f(x) \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

KÖKLERİNİN İŞARETİNİN İNCELENMESİ

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

1. $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$ ise, 2 reel kök vardır ve $x_1 < 0 < x_2$ dir. (Kökler ters işaretlidir.)
2. $\Delta > 0$ iken,
 - a) $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$ ise, kökler aynı işaretlidir.
 - I. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ ise, iki kökte pozitiftir. $(0 < x_1 < x_2)$
 - II. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ ise, iki kökte negatiftir. $(x_1 < x_2 < 0)$
 - b) $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 0$ ise, köklerden en az biri sıfırdır.
 - $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ ise, $0 = x_1 < x_2$ dir.
 - $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ ise, $x_1 < x_2 = 0$ dir.
3. $\Delta = 0$ ise, $x_1 = x_2$ dir.
 - a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ ise, $x_1 = x_2 < 0$ dir.
 - b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ ise, $0 < x_1 = x_2$ dir.
 - c) $x_1 + x_2 = 0$ ise, $0 = x_1 = x_2$ dir. (İki kökte sıfırdır.)
4. $\Delta < 0$ ise, reel kök yoktur. İşaret incelenmez.

ÖRNEK 15.

$m \in \mathbb{N}$ ve $(m-2)x^2 - 4x + m - 7 = 0$ denkleminin ters işaretli iki kökünün olabilmesi için m in alabileceği değerlerin toplamı nedir?

ÖRNEK 16.

$x^2 + 2mx + m - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.
 $x_1 < 0 < x_2$ ve $|x_1| > |x_2|$ koşullarının sağlanması için
m hangi aralıkta olmalıdır?

ÖRNEK 17.

$$\frac{x^3 - 8}{x + 2} \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan x tamsayılarının toplamı kaçtır?

ÖRNEK 18.

$$\frac{x^2}{x^2 - x - 42} \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan tamsayılar kaç tanedir?

ÖRNEK 19.

$$\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 6x + 5)} \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tamsayı vardır?

ÖRNEK 20.

$$\frac{2^{x-1}(x^2 - 1)}{(-x + 1)(x - 7)^3} \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tamsayı vardır?

ÖRNEK 21.

$$\frac{2^{-x} |x^2 - 5x + 6|}{(2 - x^3)} \leq 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

ÖRNEK 22.

$$\frac{x^2 - 4x}{(4 - x^2)(x + 1)} \geq 0$$

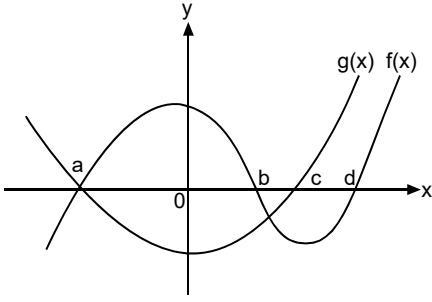
eşitsizliğini sağlayan pozitif x gerçel sayılarının kümesi nedir?

ÖRNEK 23.

$$\frac{x^2(x^2 - x - 2)}{x^3 + 1} > 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

ÖRNEK 24.



$\frac{g(x)}{f(x)} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

ÖRNEK 25.

$$\frac{x^4 \cdot (x^2 - 2x - 3)}{(x-1) \cdot (x+5)} \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane tamsayı vardır?

ÖRNEK 26.

$$\frac{(x-2)^2 \cdot (x+5)^4}{(x^2 - 2x - 3)} \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan tamsayıların toplamı kaçtır?

ÖRNEK 27.

$$\frac{2}{3} < \frac{8}{x+5}$$

eşitsizliğini sağlayan x doğal sayılarının en büyüğü kaçtır?

ÖRNEK 28.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2 - 2mx - 2m$ ifadesinin -3 'ten büyük olması için, m ne olmalıdır?

ÖRNEK 29.

$(m-1)x^2 + 4x + 2$ ifadesi daima pozitif yapan m'nin en küçük tamsayı değeri kaçtır?

ÖRNEK 30.

$x^2 - (p-1)x + p^2 - 16 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1 < 0 < x_2$ ve $|x_1| < |x_2|$ olduğuna göre, p'nin alacağı tamsayı değerleri toplamı kaçtır?

ÖRNEK 31.

$$3 < -\frac{2x+1}{3} < 5$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

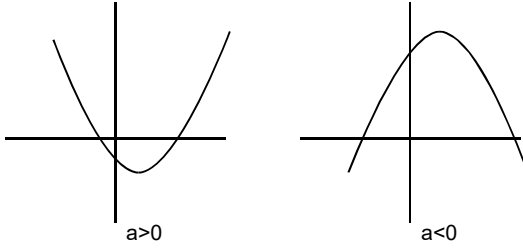
PARABOL

$a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ veya

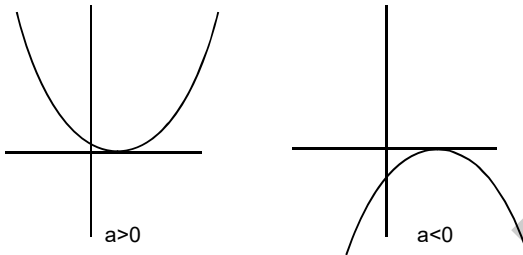
$f(x) = a(x-r)^2 + c$ fonksiyonunun grafiğine parabol denir.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu için

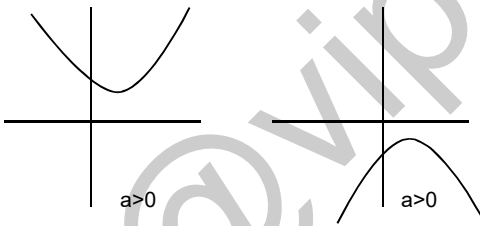
1. $\Delta > 0$



2. $\Delta = 0$

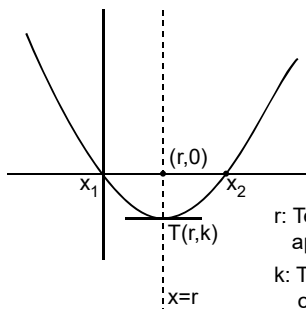


3. $\Delta < 0$



NOT:

$|a|$ büyüdükçe parabolün kolları daralır.(y eksenine yaklaşır.)



r: Tepe noktasının apsisi
k: Tepe noktasının ordinatıdır.

I. $x = r$ doğrusu parabolün simetri eksenidir.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = r$$

Not:

- 1) Parabolün tepe noktası y- ekseninde ise $r = 0$ dir. (Simetrik iki kök vardır.)
- 2) Parabolün tepe noktası
 - x – eksenine sağ tarafta teğetse
 $\Delta = 0$ ve $r > 0$
 - x – eksenine sol tarafta teğetse
 $\Delta = 0$ ve $r < 0$ dir.

II. $f(r) = k$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$T(r, k) = T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Parabolün tepe noktasının ordinatı,

- I. $a > 0$ ise $y = f(x)$ 'in alabileceği en küçük değerdir.
- II. $a < 0$ ise $y = f(x)$ 'in alabileceği en büyük değerdir.

BİR PARABOL ile BİR DOĞRUNUN BİRBİRİNE GÖRE DURUMU

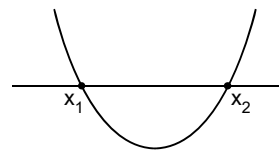
$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = mx + n$ doğrusunun birbirine göre durumunu incelemek için denklemler birbirine eşitlenir. (Ortak çözüm yapılır.)

$$ax^2 + bx + c = mx + n$$

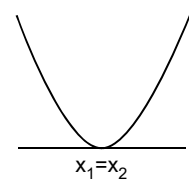
$$ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$$

ikinci dereceden denkleminin kökleri incelenir.

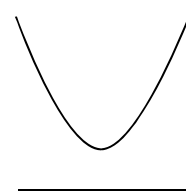
1. $\Delta > 0$



2. $\Delta = 0$



3. $\Delta < 0$



ÖRNEK 32.

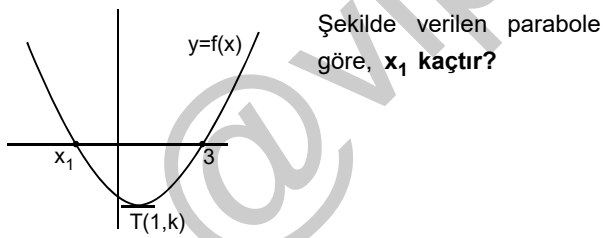
$y = mx - 3$ doğrusunun $y = x^2 - mx + 1$ parabolü ile teğet olabilmesi için m in alabileceği değerlerin çarpımı ne olmalıdır?

ÖRNEK 33.

$$f(x) = 3x^2 - 18x + 25$$

fonksiyonunun alabileceği en küçük değer kaçtır?

ÖRNEK 34.

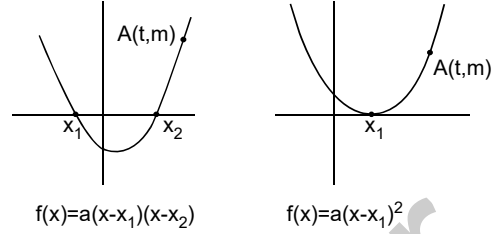


ÖRNEK 35.

$y = x^2 + (a+3)x + 3a + 4$ eğrisi x - eksenine negatif tarafta teğet ise, a ne olmalıdır?

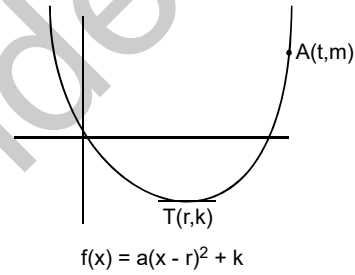
Grafiği verilen 2. dereceden fonksiyonunun denklemini yazma:

1. Kökleri ve kökleri dışında bir noktası verilen fonksiyon grafiği

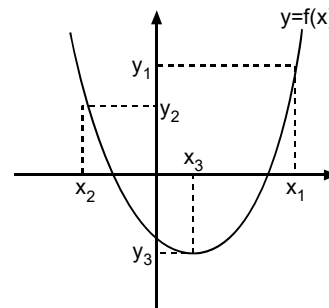


NOT: a sayısını bulmak için A noktasının koordinatları fonksiyonda yerine yazılır.

2. Tepe noktası ve başka bir noktası verilen fonksiyon grafiği



3. Fonksiyonun herhangi üç noktası verilmiş ise,

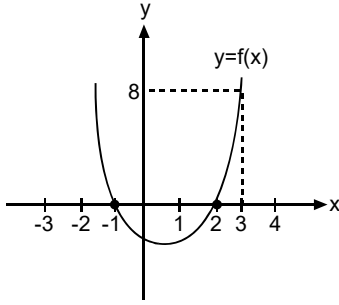


$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 &= ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 &= ax_3^2 + bx_3 + c \end{aligned}$$

denklem sistemi ortak çözümlenerek a, b, c reel sayıları bulunur.

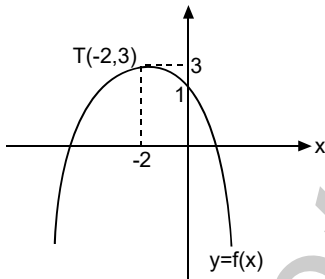
$y = ax^2 + bx + c$ yazılır.

ÖRNEK 36.



Parabolün denklemini bulalım.

ÖRNEK 37.

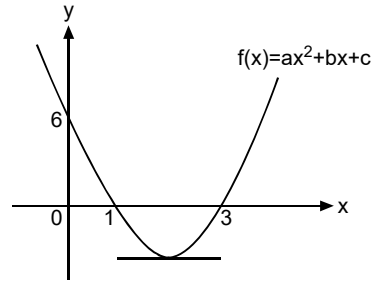


Yukarıdaki $y = f(x)$ parabolün denklemini bulalım.

ÖRNEK 38.

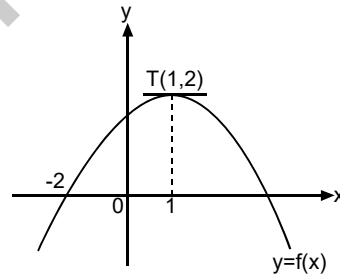
$y = x^2 + (a+2)x + a + 5$ parabolünün Ox – eksenine, eksenin pozitif tarafında teğet olması için **a kaç olmalıdır?**

ÖRNEK 39.



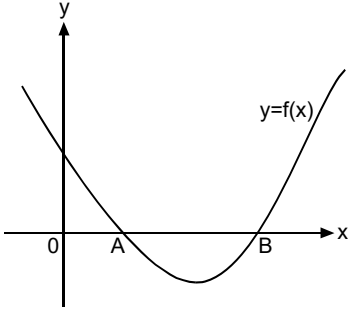
Yukarıdaki parabolün minimum değeri kaçtır?

ÖRNEK 40.



$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktasının apsisi 1 olduğuna göre, **b + c toplamı kaçtır?**

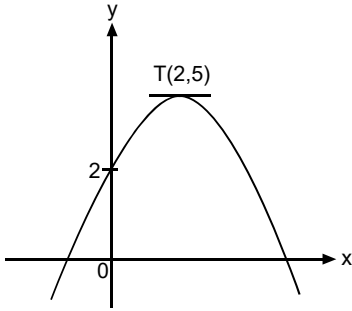
ÖRNEK 41.



Parabolün denklemleri $f(x) = x^2 - 4x + m - 1$ ve

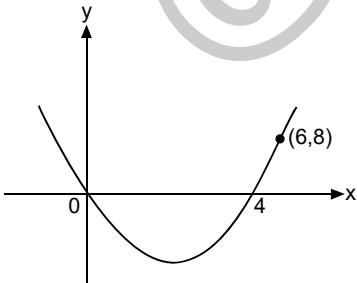
$|AB| = 3$ br ise, **m kaçtır?**

ÖRNEK 42.



Şekilde verilen parabolün denklemini bulunuz.

ÖRNEK 43.



Şekilde grafiği verilen parabol orijinden, (4, 0) ve (6, 8) noktalarından geçmektedir.

Parabolün tepe noktasının ordinatı kaçtır?

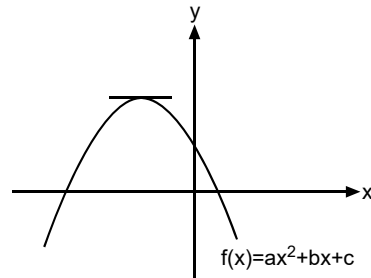
ÖRNEK 44.

$y = x^2 + 3x + m$ parabolüne $y = x + 1$ doğrusunun teğet olması için **m ne olmalıdır?**

ÖRNEK 45.

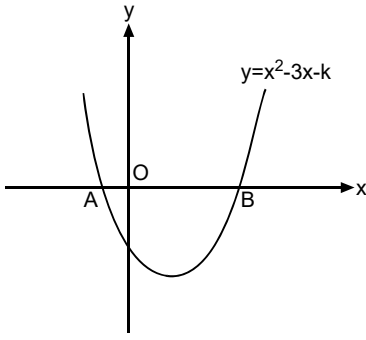
$f(x) = (m+1)x^2 - mx + 2$ parabolünün simetri ekseninin denklemleri $x - 2 = 0$ ise **f(3) kaçtır?**

ÖRNEK 46.



Şekilde verilen parabolü için aşağıdakilerden hangisi **yanlıştır?**

- A) $a \cdot c < 0$ B) $b^2 > 4ac$ C) $c \cdot b < 0$
 D) $a \cdot b < 0$ E) $a \cdot c \cdot b > 0$

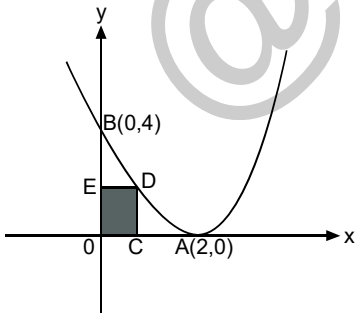


Şekilde verilen $y = x^2 - 3x - k$ parabolü için;
 $|OB| = 4|OA|$ ise, **k kaçtır?**

ÖRNEK 47.

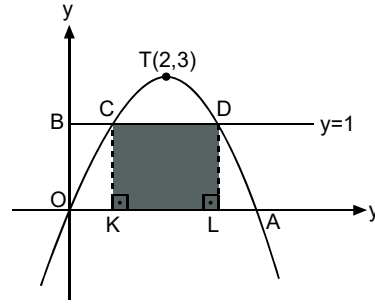
$y = x^2 - 2mx + m$ parabolünün tepe noktasının geometrik yerinin denklemini yazınız.

ÖRNEK 48.



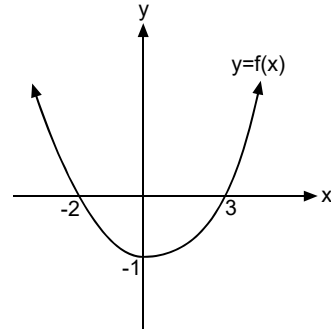
Parabol $A(2, 0)$ ve $B(0, 4)$ noktalarından geçtiğine göre, **taralı karenin alanı kaç birimkaredir?**

ÖRNEK 49.



Şekilde $y = 1$ doğrusu tepe noktasının koordinatları $(2, 3)$ olan parabolü C ve D noktalarında kesmektedir. $KLDC$ dikdörtgen ise, **C ve D noktalarının apsisi toplamı kaçtır?**

ÖRNEK 50.



Şekilde verilen $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktasının ordinatı kaçtır?

2. dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin köklerinin bir reel sayı ile karşılaştırılması

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin reel kökleri

x_1 ve x_2 ($x_1 < x_2$) olsun.

1. $x_1 < \alpha < x_2$

a. $f(\alpha) < 0$

2. $\alpha < x_1 < x_2$

a. $\Delta > 0$

b. $\alpha < -\frac{b}{2a}$

c. $f(\alpha) > 0$

3. $x_1 < x_2 < \alpha$

a. $\Delta > 0$

b. $\alpha > -\frac{b}{2a}$

c. $f(\alpha) > 0$

ÖRNEK 51.

$x^2 - mx + m + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1 < 0 < x_2$ ise, m nin alabileceği en büyük tamsayı değeri nedir?

ÖRNEK 52.

$mx^2 + (m+1)x - m = 0$ denkleminin kökleri

x_1 ve x_2 dir.

$x_1 < 3 < x_2$ olması için ne söylenebilir?

A) $m = -6$

B) $m > -6$

C) $m < -6$

D) $m > -4$

E) $m < -4$